

Calcul matriciel / Régression linéaire

Formalisme matricielle du problème

Mesure dans le tube de Kundt

Berret Geoffroy

24 juin 2004

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Présentation du problème | 2 |
| 3 | Principe du calcul | 3 |
| 3.1 | La régression linéaire simple | 3 |
| 3.2 | Formulation matricielle de la régression linéaire | 4 |
| 3.3 | Aspect statistique | 4 |
| 3.4 | Modèle linéaire multiple | 5 |
| 3.4.1 | Écriture du modèle | 5 |
| 3.4.2 | Estimation par les moindres carrés | 5 |
| 3.4.3 | Remarques et notations | 6 |
| 3.4.4 | Qualité de la régression | 6 |
| 3.5 | Application au problème de mesure dans le tube de Kundt | 7 |
| 4 | Simulation de la mesure | 8 |
| 4.1 | Introduction | 8 |
| 4.2 | Le champ de pression dans le tube | 9 |
| 4.3 | Sensibilité de la mesure aux emplacements et au nombre de mesures | 9 |
| 4.4 | Sensibilité de la mesure à l'incertitude sur la position | 10 |
| 4.5 | Sensibilité de la mesure à l'incertitude sur la température | 12 |
| 4.6 | Conclusion | 13 |
| 5 | Annexes | 15 |
| 5.1 | Programmes Matlab | 15 |
| 5.2 | Évolution de l'erreur en fonction du nombre de points de mesures | 17 |
| 5.3 | Évaluation de la qualité de la régression | 19 |

1 Introduction

Un des aspects de la mesure fait intervenir une régression linéaire multiple pour le calcul du coefficient de réflexion du matériau mesuré. Cette méthode est l'analogie de la régression linéaire d'un modèle du premier ordre avec une seule variable indépendante ($Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$) aussi appelée la droite des moindres carrées (β_0 et β_1 étant les paramètres à déterminer). La formulation matricielle de ce problème permet d'étendre la résolution à des modèles plus complets. De plus, elle facilite l'implémentation des programmes de calcul numérique¹.

Dans les paragraphes suivants, la méthode de la régression multiple est présentée et mise en application avec le problème de la mesure en tube de Kundt.

Ensuite nous présentons différentes simulations de la mesure par cette méthode de régression multiple, afin d'identifier et de quantifier les sources d'erreurs sur l'estimation de R .

2 Présentation du problème

Le but de l'exercice est de déterminer le coefficient de réflexion R (coefficient complexe), d'un matériau à partir de la mesure du champ de pression dans le tube (cf figure 1).

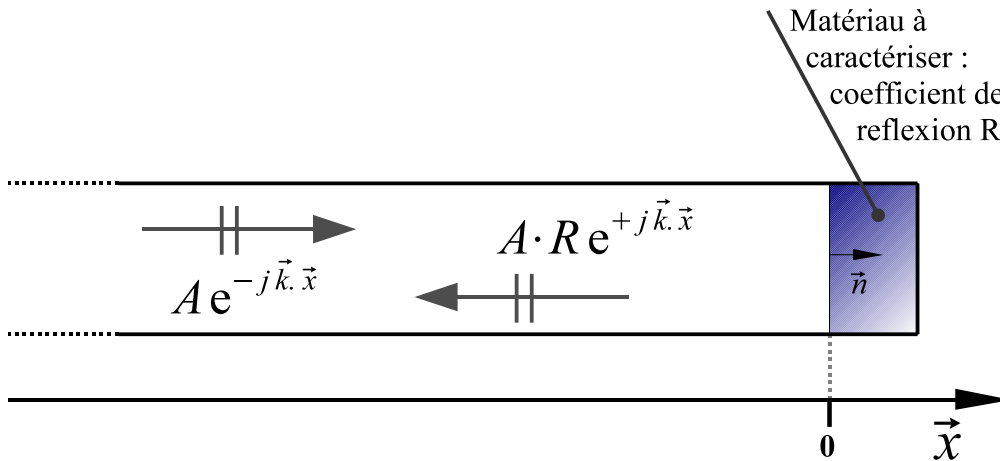


FIG. 1 – Schéma et convention

Soit n mesures de pression dans le tube à n positions différentes. En régime sinusoïdal la pression en $x = x_i$ pour $x_i \in [-L; 0]$ et i entier $\in [2; n]$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p(x_i) = p_i$$

$$p_i = Ae^{-jkx_i} + AR e^{+jkx_i} \quad (1)$$

La prise en compte des pertes visco-thermiques dans le tube se fait au travers du nombre d'onde :

Le Coefficient de perte : $\Gamma = \left[\sqrt{l_v} + (1,402 - 1)\sqrt{l_h} \right] (a \cdot \sqrt{2})^{-1} \sqrt{\frac{\omega}{c_0}}$

Célérité du son sans les pertes : $c_0 = 331,45 \sqrt{\frac{273,16 + T}{273,16}}$

¹Matlab et autre Scilab étant des logiciels de calculs dédiés à la manipulation de matrices et vecteurs.

$$c = c_0(1 - \Gamma)$$

Avec T la température en degré celcius, l_v et l_h respectivement les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique :

$$l_v = 3,986 \cdot 10^{-8}(1 + 4,73 \cdot 10^{-3}T) \quad ; \quad l_h = 5,610 \cdot 10^{-8}(1 + 5,13 \cdot 10^{-3}T)$$

$$\text{Soit le nombre d'onde : } k = \frac{\omega}{c} - j \Gamma$$

R étant de la forme $R = |R|e^{j\phi}$, deux équations sont nécessaires pour le déterminer, c.a.d. deux mesures : $n = 2$. Cependant il est possible de réaliser plusieurs mesures ($n > 2$) afin de s'affranchir au mieux des erreurs. Le calcul de R peut alors se faire différemment sous forme matricielle.

3 Principe du calcul

Ce paragraphe présente synthétiquement (et non rigoureusement !) le principe de calcul du coefficient R au moyen d'un modèle linéaire multiple. La présentation qui suit s'appuie très largement sur les références [1], [2], [3] et [4]. Dans un premier temps, les principes de la régression linéaire et de la régression multiple sont rappelés. Ensuite, les calculs sont appliqués au problème de mesure de R dans le tube de kundt.

Notation :

Dans tout le paragraphe 3 les matrices et vecteurs seront notés en **caractères gras**, les scalaires en caractères simples.

3.1 La régression linéaire simple : présentation succincte

Le problème de la régression linéaire est de déterminer les paramètres d'un modèle reliant Y à X , à partir de n mesures $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2) \cdots (Y_i, X_i) \cdots (Y_n, X_n)\}$. Le cas simple du modèle du premier ordre avec une seule variable s'écrit :

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$$

Le calcul des paramètres $[\beta_0 \ \beta_1]$ est réalisé en minimisant l'erreur commise sur leur estimation. X_i est supposée connue sans erreur. Du fait de l'erreur sur Y , les couples (X_i, Y_i) ne se situent pas exactement sur la droite représentée par $Y = \beta_0 + \beta_1 X$. En fait les mesures correspondent au modèle bruité :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

Hypothèses sur la mesure :

1. u est un bruit centré indépendant de Y . De variance : $V(u_i) = \sigma^2$
2. X_i est connu sans erreur

La méthode des moindres carrés consiste à chercher les valeurs des paramètres β_0 et β_1 qui rendent minimale la somme des carrés ss_r des écarts résiduels² entre les valeurs observées Y_i et les valeurs calculées de \hat{Y}_i :

$$ss_r = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

² ss_r : sum of squared residuals

En remplaçant \hat{Y}_i :

$$ss_r = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 X_i - Y_i)^2$$

Cette relation fait apparaître la somme des carrés des écarts comme une fonction des paramètres β_0 et β_1 . Lorsque cette fonction est minimale, les dérivées par rapport à ces paramètres s'annulent. L'annulation des dérivées de ss_r conduit aux équations suivantes, dites *les équations normales* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \\ \beta_0 \sum_{i=1}^n X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{array} \right. \quad (2)$$

β_0 et β_1 sont alors déterminés au sens des moindres carrés.

3.2 Formulation matricielle de la régression linéaire

Le système des équations (2) s'écrit sous forme matricielle (\sum sur i de 1 à n) :

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \quad \mathbf{C} \quad (4)$$

En introduisant les matrices \mathbf{X} et le vecteur \mathbf{Y} tels que :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} et \mathbf{C} s'exprime alors en fonction de \mathbf{X} et \mathbf{Y} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^t \mathbf{X} \quad \mathbf{C} = \mathbf{X}^t \mathbf{Y}$$

Le système (3) s'écrit alors en fonction de l'échantillon $\{\mathbf{X} \mathbf{Y}\}$:

$$\mathbf{X}^t \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \quad (5)$$

L'estimateur des moindres carrés de \mathbf{B} s'exprime alors :

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \quad (6)$$

3.3 Aspect statistique

L'approche statistique donne accès à différents indicateurs de la qualité de l'ajustement et de la mesure :

- r^2 Coefficient de détermination (carré du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y). r^2 exprime le pourcentage de variation de Y que la régression réalisée explique.

- $\hat{\sigma}_r$ L'écart-type résiduel. C'est une estimation de l'erreur commise sur la mesure de Y . σ_r est l'écart type de l'erreur ϵ .
- $\hat{\sigma}_{0/1}$ Écart type. Il correspond à une estimation de l'erreur commise sur la détermination du paramètre $\beta_{1/2}$.

Tout ces indicateurs peuvent se calculer à partir des matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} et $\hat{\mathbf{B}}$. Le paragraphe suivant présente la généralisation de la régression linéaire à des modèles multiples, ainsi que les expressions de différents indicateurs quantifiant la qualité de l'ajustement.

3.4 Modèle linéaire multiple

3.4.1 Écriture du modèle

Soient les variables Y et (X_1, \dots, X_k) observées sur un échantillon de taille n . Pour l'observation numéro i on a $(Y_i, X_{i1}, \dots, X_{ik})$. On note par \mathbf{X} la matrice (n, k) des valeurs des variables (X_1, \dots, X_k) . Chaque ligne de \mathbf{X} est constituée des valeurs de X_k prise à l'observation i (en générale $n > k$).

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ X_{21} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Le modèle multiple s'écrit :

$$\begin{cases} Y_i = \sum_{h=1}^k b_h X_{ih} + u_i & i \in [1; n] \\ E(u_i) = 0 & V(u_i) = \sigma^2 \\ E(u_i, u_l) = 0 & (i \neq l) \end{cases} \quad (8)$$

Si on note :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Le modèle s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{u} \\ E(\mathbf{u}) = 0 \\ V(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n\sigma^2 \end{cases} \quad (9)$$

3.4.2 Estimation par les moindres carrés

On cherche une estimation $\hat{\mathbf{b}}$ de \mathbf{b} qui minimise $ssr(\mathbf{b})$:

$$ssr(\mathbf{b}) = ssr(b_1, \dots, b_k) = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

$$\min_{\mathbf{b}} \sum_{i=1}^n u_i^2 = \min_{\mathbf{b}} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \sum_{l=1}^k b_l X_{il} \right)^2 \quad (10)$$

On peut écrire $ssr(\mathbf{b})$:

$$\begin{aligned} ssr(\mathbf{b}) &= (\mathbf{Y} - \mathbf{b X})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{b X}) \\ &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2 \mathbf{b}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} + \mathbf{b}^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (11)$$

L'application du critère des moindres carrés, consistant à minimiser ces derniers (équation 10), mène aux équations normales (cf. §3.1) sous forme matricielle :

$$-2 \mathbf{X}^t \mathbf{Y} + 2 \mathbf{X}^t \mathbf{X} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (12)$$

D'où l'estimateur $\hat{\mathbf{b}}$ des moindres carrés de \mathbf{b} :

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \quad (13)$$

3.4.3 Remarques et notations

Ici sont décrit quelques calculs utiles pour la suite.

1. $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \hat{\mathbf{b}}$ est la valeur ajustée du vecteur \mathbf{Y} par le modèle.

2. Le vecteur des résidus : $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{u}}$.

Avec $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y}$, les résidus s'écrivent :

$$\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t] \mathbf{Y}$$

3. σ^2 est estimé par : $\hat{\sigma}^2 = \hat{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{u}} (n - k)^{-1}$

Avec n nombre de mesures réalisées et k nombre de variables.

4. Estimation de la variance de $\hat{\mathbf{b}}$: $V(\hat{\mathbf{b}}) = \sigma_{\hat{\mathbf{b}}}^2$

(référence Draper & Smith [3])

La matrice de variance-covariance de \mathbf{b} est $\hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$.

La variance de l'élément b_i de \mathbf{b} sera alors $V(b_i) = c_{ii} \hat{\sigma}^2$, avec c_{ii} élément de la diagonal de $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$. Idem avec la covariance de $b_i b_j$: $\text{cov}(b_i, b_j) = c_{ij} \hat{\sigma}^2$ avec $i \neq j$

L'estimation de la variance de $\hat{\mathbf{b}}$ s'écrit : $\hat{\sigma}_{\hat{\mathbf{b}}}^2 = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$

3.4.4 Qualité de la régression

Coefficient de détermination r^2 :

1. Cas du modèle avec terme constant (modèle affine)

cette indicateur perd beaucoup de sa signification quand il n'y a pas de terme constant dans le

modèle (cf. [4] [2]). Il peut être calculé, mais il n'est plus compris entre 0 et 1 :

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{u}}}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

2. Modèle sans terme constant (cf. [4] [2])

Cette indicateur est à utiliser dans le cas d'un modèle sans terme constant :

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}}$$

Le test des résidus peut permettre d'éliminer des points fortement bruités ou aberrants. En faisant l'hypothèse d'un bruit normal de variance $\hat{\sigma}^2$ ($E(u_i) = 0$ par hypothèse), il est possible d'analyser les résidus $\hat{\mathbf{u}}$. On peut alors considérer un point comme aberrant quand $\hat{u}_i/\hat{\sigma} > 3$. En effet $\int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(U|\sigma) = 0,997 \dots$ pour la loi normale. Le modèle peut alors être recalculé en évitant ces points.

3.5 Application au problème de mesure dans le tube de Kundt

Le calcul du coefficient de réflexion R d'un matériau peut être effectué avec la méthode de régression multiple. Voyons maintenant comment formaliser le problème en fonction de la description qui en est faite au paragraphe 2.

La pression en x_i dans le tube peut s'écrire comme la somme de fonctions $X_h(x_i)$ connues, pondérées par les coefficients A et AR qui sont à déterminer. h varie de 1 à 2 respectivement pour l'onde aller et l'onde retour et i varie de 1 à n , n étant le nombre de mesure de pression dans le tube. Soit le modèle suivant :

$$p_i = AX_{i1} + ARX_{i2} + u_i \quad (14)$$

$$\text{avec } X_{ih} = X_h(x_i) = e^{(-1)^h j k x_i}$$

$$\text{et } V(u_i) = \sigma^2 \quad E(u_i) = 0$$

Soit sous forme matricielle les n mesures :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ AR \end{bmatrix} \quad (15)$$

Soit les matrices et vecteurs :

$$\begin{matrix} Y & = & \mathbf{X} & \mathbf{B} \\ n \times 1 & & n \times 2 & 2 \times 1 \end{matrix} \quad (16)$$

Il s'agit donc d'un modèle à deux variables sans coefficient constant. L'estimation des paramètres A et AR peut se faire à partir de l'équation (13). Par cette estimation on cherche pour chaque fréquence le couple (A, AR) pour lequel le modèle (14) passe au mieux par tous les points de mesures. Par exemple à 500 Hz le calcul optimise les valeur de R et AR afin que la courbe (cf. figure 3) passe par les points mesurés.

Les différents indicateurs de la qualité de la mesure et du bruit peuvent être utilisés pour évaluer la qualité de la regression. Le coefficient de determination $\cos^2 \alpha$ peut être évaluer pour chaque fréquence et ainsi fournir une indication de la qualité du calcul pour chaque fréquence mesurée.

4 Simulation de la mesure

4.1 Introduction

Au paragraphe 5.1 est reporté le script matlab du programme de simulation de la mesure de R . Les caractéristiques du matériaux simulé sont issues de *Maine3A* et correspondent à la *mousse 2* de la base de données standard, épaisseur 50 mm. Ces caractéristiques sont reproduit à la figure 2. Le programme Matlab implémente le calcul matricelle de la regression multiple. Les différents indicateurs statistiques tel que $\cos^2 \alpha$ et la variance du bruit sont calculés.

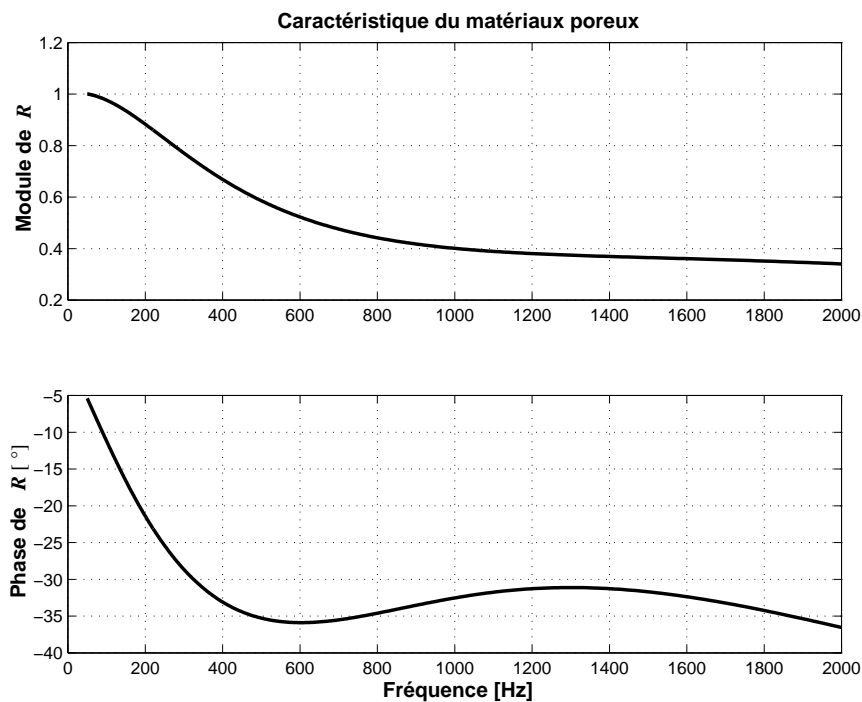


FIG. 2 – Caractéristique de la mousse utilisée pour la simulation, Mousse 2, épaisseur 50 mm

La simulation à permit d'étudier le comportement de la regression et la qualité de la mesure en fonction de différents paramètres :

- le nombre de mesure de pression
- les emplacements des points de mesures
- la sensibilité au bruit
- l'incertitude sur la température / la position de mesure

Dans un premier temps nous avons validé le programme en retrouvant par une simulation de mesure non bruitée une valeur connue de R . Ensuite nous avons cherché à identifier les différentes causes d'incertitudes apparaissant dans les simulations des mesures bruitées.

4.2 Le champ de pression dans le tube

Le réseau d'onde stationnaire crée dans le tube lors de la mesure produit un champ de pression qui n'est pas uniforme (cf. figure 3). La pression quadratique moyenne est de la forme :

$$\langle p^2(x, t) \rangle = \frac{|p(x)|^2}{2} = \frac{|A|^2}{2} \left(1 + |R|^2 + 2|R| \cos(2kx + \phi) \right) \quad (17)$$

avec $R = |R|e^{j\phi}$ et $k = \omega/c$

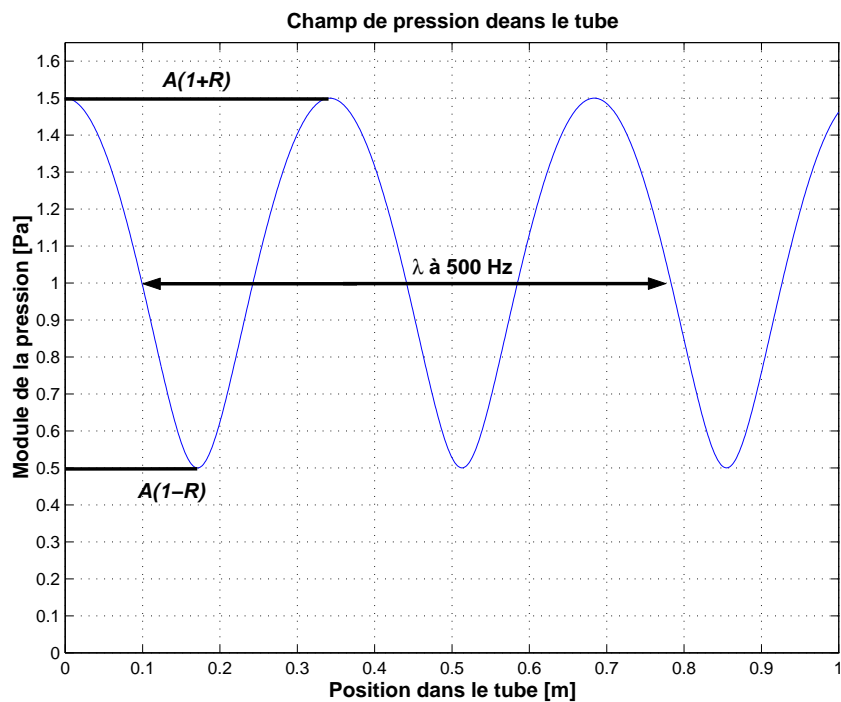


FIG. 3 – Champ de pression dans un tube à 500Hz , $R = 0,5 + 0j$

Dans un cas simple où R vaut $0,5$ et ϕ est nul le champ de pression est représenté à la figure 3. Il est facile de démontrer que le module de R détermine l'amplitude des minima et maxima de $\langle p^2(x, t) \rangle$. La phase ϕ translate la courbe sur l'axe horizontal. Lors de la mesure se sont des points de cette courbe qui sont mesurée, pour être évalué par la regression linéaire.

4.3 Sensibilité de la mesure aux emplacements et au nombre de mesures

Dans [5] l'étude des positions singulières de mesures dans le tube fait ressortir un cas particulièrement défavorable à la mesure de R . La méthode TMTC présentée, met en œuvre deux microphones réalisant une mesure simultanée de la pression dans le tube. Lorsque l'espacement microphonique correspond à $m(\lambda/2)$, m entier, les deux microphones mesurent le même niveau de pression au bruit près. Le coefficient R est alors très mal déterminé puisque la différence de niveaux

| | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| C_2^n | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |

TAB. 1 – Combinaisons sans répétition pour les écartements microphoniques

entre les deux mesures ne correspond plus à la grandeur que nous voulons caractériser³.

Nous avons remarqué que le même problème existe dans notre configuration à un microphone se déplaçant en plusieurs points de mesures ($n > 2$).

Pour n mesures de pression dans le tube il y a $N_e = C_2^n$ écartements de microphone possible⁴, les 10 premières valeurs de n sont calculées : cf. tableau 1. On aura donc au maximum N_e écartements problématiques et encore plus de fréquences problématiques dans le pire des cas puisque les harmoniques posent le même problème. Les fréquences correspondantes sont déterminées par la formule suivante :

$$f = \frac{m.c}{2L(i)}$$

Avec $L(i)$ écartement microphonique et i de 1 à N_e .

Sensibilité au nombre de points de mesure.

Un écartement microphonique donne donc lieu à un peigne de fréquence dont l'écartement fréquentiel varie en fonction de l'inverse de l'écartement spatial considéré. Pour chaque fréquence de ce peigne R est mal évalué. La figure 4 présente un exemple, pour un cas à deux microphones (n.b. : *L'erreur relative affichée dans toutes les figures de ce paragraphe est évaluée par le calcul suivant : $\epsilon = moy [| (R_v - R_m) | / R_v]$, R_v valeur vraie, R_m valeur mesurée.*)

Quand on augmente le nombre de mesure de pression dans le tube pour $n = 3$, $n = 4$, on remarque que l'erreur moyenne diminue et que le nombre de fréquence singulière augmente très rapidement (cf. figure 5). Cependant la mesure s'améliore nettement, bien qu'il reste les zones où coïncident plusieurs fréquences : 1500 Hz par exemple sur la figure 5.

Sensibilité basse fréquence au bruit.

En basse fréquence la longueur d'onde devient très grande, les mesures de pression se trouvent alors pour la plupart sur le premier ventre de pression de l'onde stationnaire. Les mesures basse fréquence sont alors moins sensibles au bruit.

4.4 Sensibilité de la mesure à l'incertitude sur la position

L'équation (17) nous indique déjà sur quelle grandeur va jouer une incertitude sur la position. La grandeur indiquant la position dans le tube, à savoir x dans l'équation, intervient dans l'argument du cosinus au coté de la phase de R . Une incertitude sur la position mène donc à une incertitude sur l'évaluation de la phase de R . La simulation le confirme, la figure 6 présente le résultat pour une erreur centrée de quelques dixièmes de millimètres⁵ d'ecart type. On remarque que l'estimation de R est alors décalé de -10° environ, sauf en basse fréquence où l'erreur s'annule.

³Le même problème se pose en très basse fréquence quand la longueur d'onde devient grande, la pression ne varie plus assez dans le tube pour apprécier le patron d'onde

⁴ $C_2^n = \frac{n!}{2(n-2)!}$

⁵Erreur sur chaque position de microphone : $\Delta_{4\mu} = [+0,82 \quad +0,60 \quad +0,040 \quad -1,127]$ mm

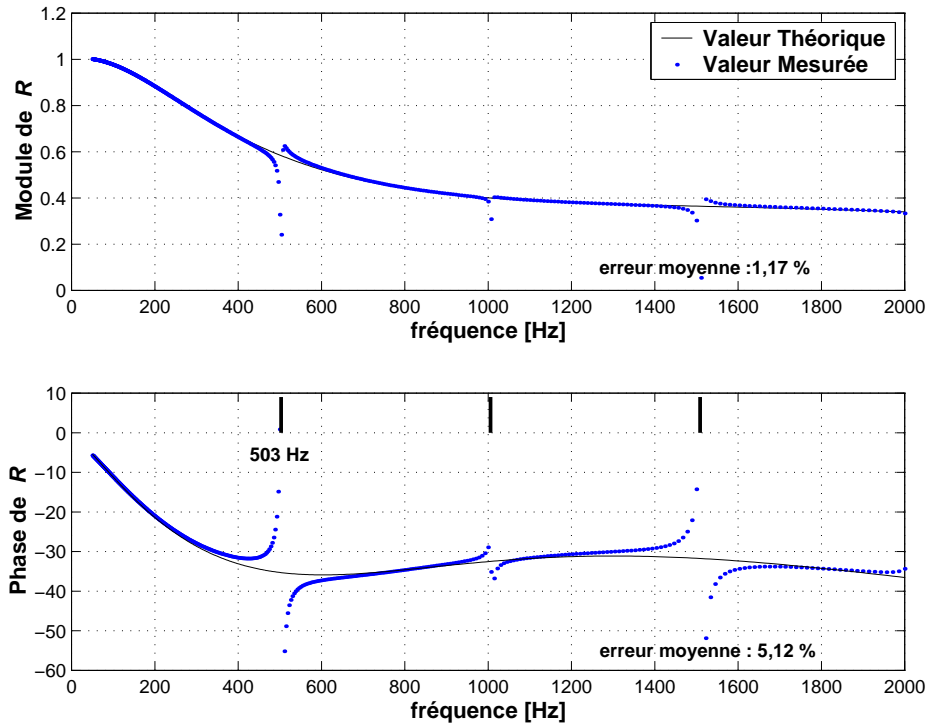


FIG. 4 – BRUIT CENTRÉ SUR LA PRESSION MESURÉE Simulation de la mesure à deux microphones, bruit de 1/100 de Pa , écartement microphonique de 34 cm , mousse 2

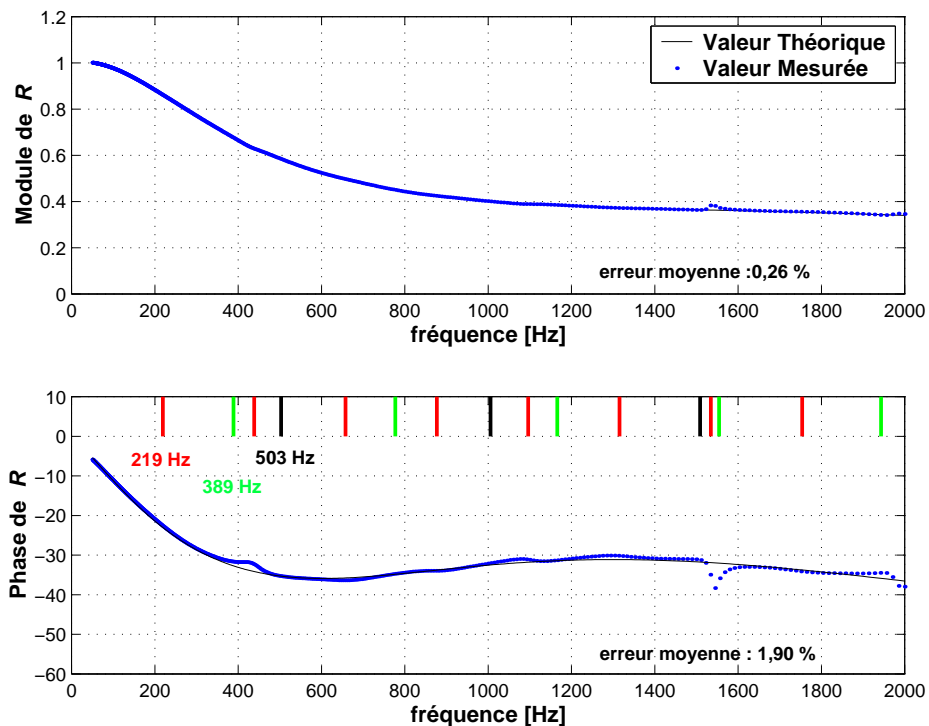


FIG. 5 – BRUIT CENTRÉ SUR LA PRESSION MESURÉE Simulation de la mesure avec trois positions microphoniques [0 ; 34 ; 78] cm, bruit de 1/100 de Pa , écartement microphonique [78 ; 44 ; 34] cm , mousse 2

Si l'erreur sur la position correspond à un décalage fixe de quelques millimètres sur la position on remarque que l'effet est le même. Cependant on peut apprécier comment varie l'erreur sur l'estimation de R en fonction du signe de Δx : cf. figure 7

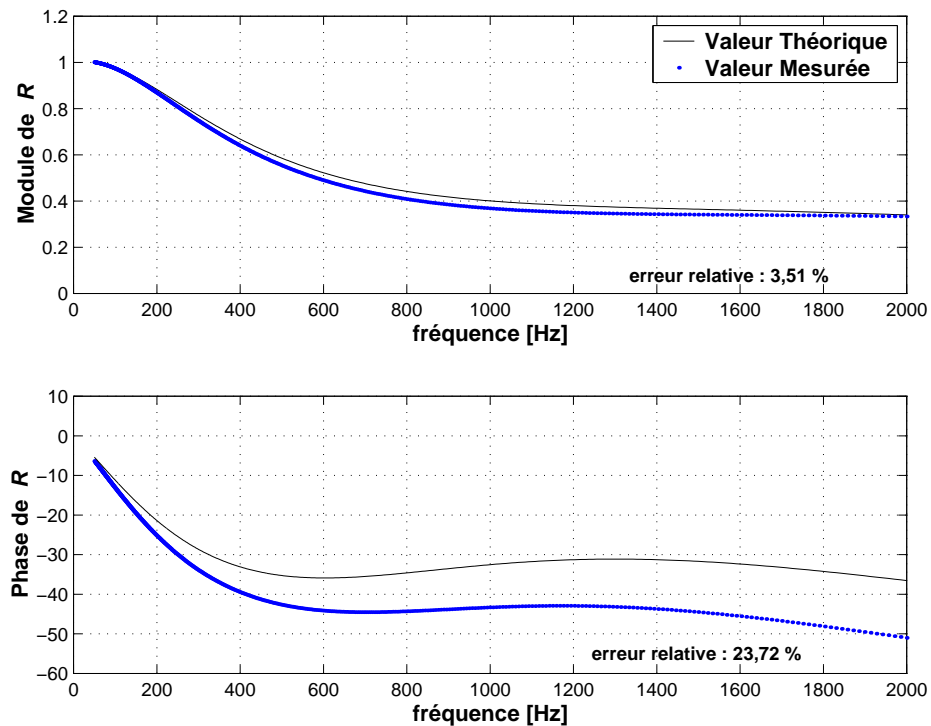


FIG. 6 – ERREUR CENTRÉE SUR LA POSITION. Simulation de la mesure avec quatre positions microphoniques [0,2 ; 0,42 , 0,84 , 1,68] cm, bruit centré de 1/10 de mm , mousse 2

4.5 Sensibilité de la mesure à l'incertitude sur la température

L'erreur sur la température est à mettre en parallèle avec celle sur la position. La température intervient aussi dans l'argument du cosinus (équation 17) au travers du nombre d'onde k . Le nombre d'onde utilisé modélise les pertes visco-thermiques dans le tube (cf.§2), il est fonction de la température. On remarque les mêmes effet sur l'évaluation de R , la phase est très mal évaluée (cf. figure 8) pour les mêmes raisons que la position. La figure 8 peut être comparée avec la figure 5, seul le delta de température $\Delta T = +2 \text{ } ^\circ\text{C}$ diffère entre les deux simulations.

La simulation de la figure 8 est donc réalisée avec deux sources d'erreur : un bruit sur la pression mesurée et une erreur fixe sur la température. Cela ne permet pas d'apprécier l'influence absolue de la température sur la mesure, mais nous avons remarqué qu'une erreur unique sur la température ne mène pas à une erreur énorme sur R .

Pour comparaison, une erreur de $+2 \text{ } ^\circ\text{C}$ sur la température en présence d'aucune autre source d'erreur mène à une erreur sur le module de 0,093 % et une erreur sur la phase de 0,63 %. Cependant la comparaison entre les simulations des figures 8 et 5 montre qu'en ajoutant au bruit sur la pression, une erreur de $+2 \text{ } ^\circ\text{C}$ sur la température, l'erreur augmente dans des proportions plus importantes (cf Tableau 2). Cependant cette effet se manifeste différemment en fonction de nombre de points de mesure et des écartements choisis.

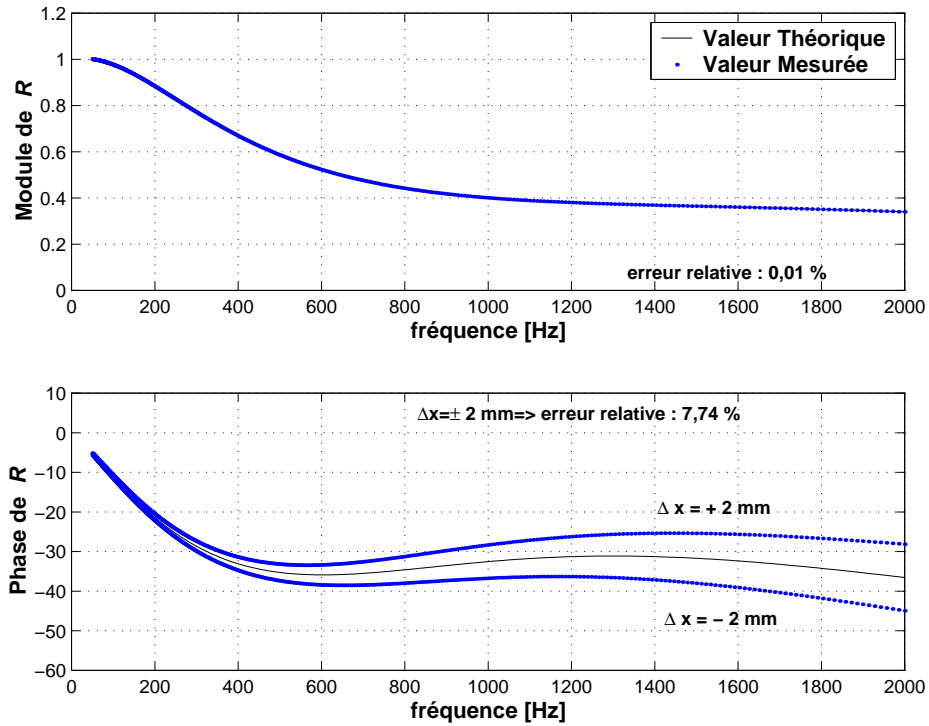


FIG. 7 – ERREUR NON CENTRÉE SUR LA POSITION. Simulation de la mesure avec quatre positions microphoniques [0,2 ; 0,42 , 0,84 , 1,68] cm, $\Delta x = \pm 0,2\text{mm}$, mousse 2

| | Erreur sur $ R $ | Erreur sur ϕ |
|--|------------------|-------------------|
| $\Delta T = +2\text{ }^{\circ}\text{C}$ | 0,09 % | 0,63 % |
| Bruit de 1/100 de Pa | 0,26 % | 1,90 % |
| $\Delta T = +2\text{ }^{\circ}\text{C}$ & Bruit de 1/100 de Pa | 1,18 % | 8,16 % |

TAB. 2 – Erreur sur la température en fonction de la présence d’une autre source d’erreur

4.6 Conclusion

Les différentes simulations sur la mesure de R mettent en évidence la difficulté d’estimer correctement la phase de R . En effet la mesure de la phase est sensible à toutes les sources d’incertitudes alors que l’estimation du module est essentiellement sensible au bruit sur le champ de pression.

On remarque aussi que la coïncidence de plusieurs écartements microphoniques dégrade nettement la mesure de R . Il est intéressant de choisir des séries de positions ne menant pas à doubler un écartement microphonique. De plus il faut aussi éviter que les écartements microphoniques soient des multiples entier d’un écartement inférieur.

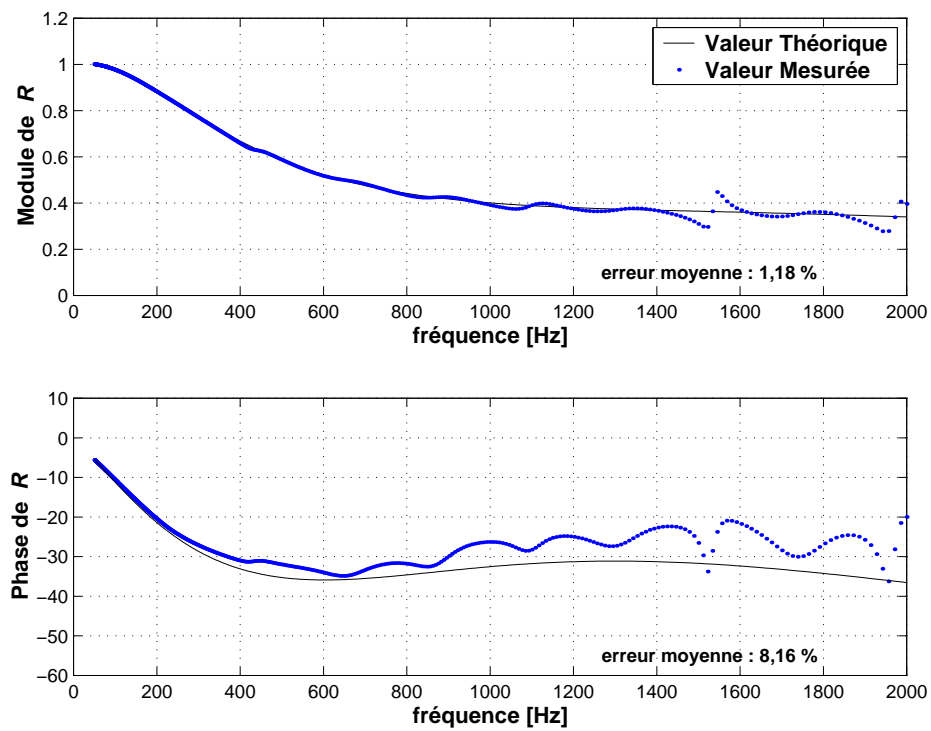


FIG. 8 – ERREUR SUR LA TEMPÉRATURE. Simulation de la mesure avec trois positions microphoniques [0 ; 34 ; 78] cm, $T = +20\text{ }^{\circ}\text{C}$, Erreur sur la température : $\Delta T = +2\text{ }^{\circ}\text{C}$, Bruit de 1/100 de Pa, mousse 2

5 Annexes

5.1 Programmes Matlab

```
0 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1 %
2 % Simulation de la mesure en tube de kundt
3 %
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 %
6 %PROJET 3A Beillard / Berret / Brouard
7 %
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9 %Version 2.2
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 %      SIMULMESB simule la mesure du coef de reflexion dans un tube de kundt
12 %      niveau de bruit = Rsb de 40dB pa rapport à l'onde incidente
13 %
14 %      [F,Rth,Rm,C,F_sing,Sigma,Qr]=simulmesBv22(X,NT)
15 %
16 %      X      position du microphone
17 %      NT     Type de bruit fixe ou différent à chaque appel de fonction
18 %
19 %      F      vecteur fréquence utilisé pour le calcul
20 %      Rth    coef de reflexion théorique
21 %      Rm     coef de reflexion mesuré par la méthode
22 %      C      célérité du son dans le tube
23 %      F_sing Fréquence singulière issuent des écarts micro.s
24 %      Sigma  Estimation du bruit sur la mesure
25 %      Qr     Qualité de la régression
26
27 function [f,Rth,Rm,c,f_sing,Sigma,Qr]=simulmesBv22(x,nt)
28 clc
29 %vecteur positions de mesures
30 %si aucun argument en entree if nargin==0
31 % Alors x=[ 5cm racine_carre(5cm) racine_quatrième(5cm) ]
32 if nargin==0
33     x0=.05;
34     x=[x0 ; x0^0.5 ; x0^0.25];
35     nt='f';
36 end
37
38 rho0 = 1.204;
39 temp = 20;
40
41 % rayon du tube
42 ray = 0.04436/2.;
43
44 f=[10;100;250;500;1000;2000];
45
46 %Coefficient de reflexion du matériau Rth
47 % Rht dimension nf lines 1 colones nf=longueur de f
48 Rth=0.5*exp(j*pi/7)*ones(length(f),1);
49
50 %OU Load Mat file (mousse 2 de maine3a 50 mm)
51 load mat_data
52
53 %Pulsation
54 w = 2 * pi * f;
55
56 %nombre d'onde
57 c0 = 331.45 * sqrt((273.16 + temp)/273.16);
58 lv = 3.986E-8 * (1 + 4.73E-3 * temp);
59 lh = 5.610E-8 * (1 + 5.13E-3 * temp);
60
61 toto = (sqrt(lv) + (1.402 -1) *sqrt(lh)) / (sqrt(2) * ray);
62 c = c0 * ( 1 - toto * sqrt(c0 ./ w) );
63 perte = toto * sqrt(w / c0);
64 gamma = j * w ./ c + perte;
65
66 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
67 % calcul du champ de pression theorique dans le tube
```

```

68 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%soit n le nombre de points mesurés
70 n=length(x);
%soit nf le nombres de fréquence mesurée
72 nf=length(f);

74 % pression théorique dans le tube
% Pression incidente de 1 Pa
76 % pour n position de micro et nf fréquence

78 [Gamma,X]=meshgrid(gamma,x);
R=ones(n,1)*Rth';
80

82 p_tmp=zeros(n,nf,1);
p_tmp(:,:,1)=exp(-Gamma .* X) + R.* exp(Gamma .* X);

84 %pression non bruité p
% => tableau p de dimension n lignes x 1 colone x nf tranches
86 % => tableau p de dimension
%           -- lignes : nombres des points de mesures
88 %           -- colones : 1 pression complexe dans le tube à la position n
%           -- tranches: nombres de fréquences étudier
90
92 p=permute(p_tmp,[1,3,2]);

%pression bruité P_b
94 % Soit un rapport signal sur bruit de 40dB
% avec un pression iincident de 1 Pa soit 94dB
96 % le niveau de bruit (1/100) Pa
% Les dimensions de P_b sont les mêmes que p pression non bruitée
98

bruit=zeros(n,nf);
100 %Génération d'un bruit diff chaque appel
%*****
102 if nt=='r'
    b_tmp=randn(n,1,1)*(1/100);
104    bruit=b_tmp*ones(1,nf);
end
106 %*****
%Même Bruit à chaque appel => limite nb position n=20
108 %*****
if nt=='f'
110    b_tmp=(1/100)*[0.8212    0.5973    0.0396   -1.1265    0.6824   -0.2719    0.1640...
112                  0.4518   -0.2711   -0.5712   -1.4166   -1.0569    1.7667...
114                  2.1078   -1.0225   -0.1121    0.0629   -0.4393    1.8350]';
    bruit=b_tmp(1:n)*ones(1,nf);
end
116 %*****
p_tmp=p_tmp+bruit;
P_b=permute(p_tmp,[1,3,2]);clear p_tmp;
118

% Tracé de la presion bruitée / non bruitée
120     %f0=500;
     %ind=find(f<=f0);
122     %plot(x,abs(p(:,1,ind(end))),x,abs(P_b(:,1,ind(end))))),grid on
%*****
124 %***** CALCUL MATRICIEL %*****
E=zeros(n,2,nf);
126 % construction de la matrice E (matrice X du MM)
for k=1:n
128     E(k,1,:)=exp(-gamma * x(k));
     E(k,2,:)=exp(+gamma * x(k));
130 end

132 % construction de la matrice EE TRANSPOSEE de E
EE=permute(E,[2,1,3]);
134

%calcul des coefficients A et AR => Calcul de R
136 %estimation de l'ecart type du bruit
%estimation de la qualité de la regression
138

for i=1:nf
140     B(:,i)=(EE(:,i)*E(:,i))^-1*EE(:,i)*P_b(:,1,i);
     Rm(i,1)=conj(B(2,i)/B(1,i));

```

```

142     %Les résidus
      U(:,i)=P_b(:,1,i)-E(:,i)*B(:,i);
144     %Qualité de la régression
      U2=U(:,i).'*U(:,i);
146     P_b2=P_b(:,1,i).'*P_b(:,1,i);
      Qr(i)=1-U2/P_b2;
148     %Estimation du bruit sur la mesure
      Sigma=U2/(n-2);
150 end

152 %*****
%calcul des ecartements microphonique possible
154 e=[];tmp=x';
e=[];f_sing=[];a=[];b=[];
156 tmp=x';
for i=1:n-1
158     e=[e,tmp(i+1:n)-tmp(i)];
      f_sing=[f_sing,342*(2*(tmp(i+1:n)-tmp(i))).^-1];
160     a=[a,i+1:n];b=[b,ones(1,n-i)*i];
end
162 clear tmp
164 return

```

5.2 Évolution de l'erreur en fonction du nombre de points de mesures

Pour cette étude nous avons utilisé un vecteur position particulier. Sa construction permet de ne pas avoir deux fois le même écartement, ni aucun multiple des écartements précédents.

$$[2 \quad 4,2 \quad 8,4 \quad 16,8 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_n] \text{ mm}$$

La simulation a permis de voir l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de points de mesure. La figure présente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de mesure effectuée. A chaque mesure supplémentaire une position est ajouté au vecteur x tel que $x_n = 2 x_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Les positions simulées sont :

$$x = [0,2 \quad ; \quad 0,42 \quad ; \quad 0,84 \quad ; \quad 1,68, \quad ; \quad 3,36, \quad ; \quad 6,72 \quad ; \quad 13,44 \quad ; \dots \\ 26,88 \quad ; \quad 53,76 \quad ; \quad 107,52 \quad ; \quad 215,04 \quad ; \quad 430,08 \quad ; \quad 860,16] \text{ cm}$$

Les séries de graphes se lisent de gauche à droite en ligne. Le premier graphe correspond à la mesure à 5 positions microphoniques (5μ). Pour les valeurs inférieures à 5 l'erreur sur l'évaluation de R est plus importante, notamment pour la phase en basse fréquence. Cela provient des faibles écarts microphoniques de x comportant peu de positions (cf paragraphe 4.3). Le tableau suivant regroupe les valeurs

| | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|------|------|------|
| Erreur sur la phase % | 150 | 178 | 190 |
| Erreur sur le module % | 4,75 | 5,66 | 6,06 |

TAB. 3 – Evolution de l'erreur avec le nombre de mesures

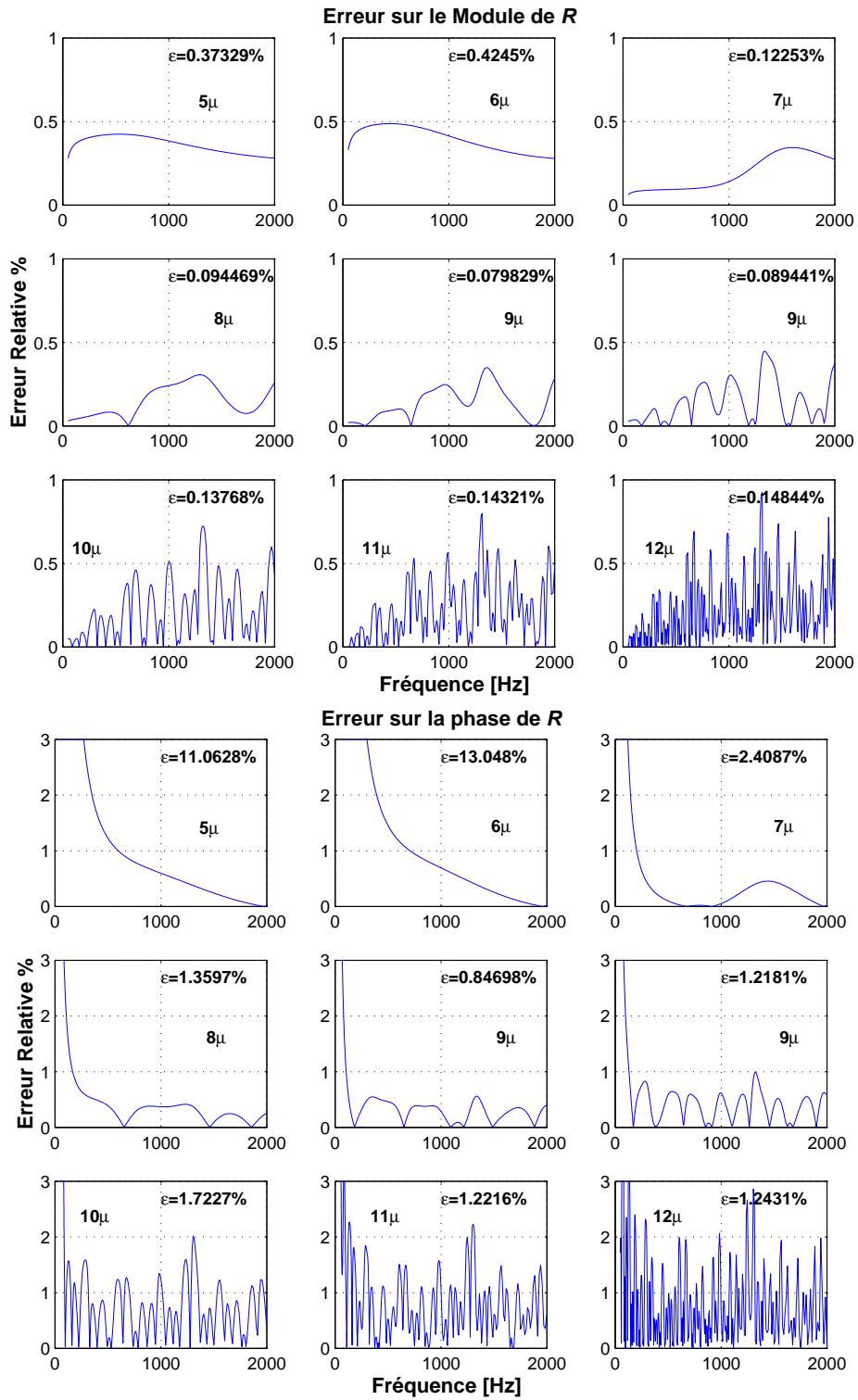


FIG. 9 – ÉVOLUTION DE L'ERREUR EN FONCTION DU NOMBRE DE MESURE DE PRESSION Simulation de la mesure avec $T = +20\text{ }^{\circ}\text{C}$, bruit de 1/100 de Pascal, mousse 2

5.3 Évaluation de la qualité de la régression

Le critère suivant est utilisé pour évaluer la qualité de la regression (cf. §3.4.4 page 6) :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}}$$

Pour une mesure fortement bruitée (1/10 de Pascal de bruit pour une onde incidente de 1 Pascal) avec une erreur sur la température de +2 °C et de 0,2 cm sur la position le coefficient nous donne un résultat compris entre 0,9992 et 0,9910 (cf. figure 10). Le critère calculer avec la formule ci dessus est complexe puisque la pression est sous forme complexe dans le programme et pour la mesure aussi par ailleurs. La grandeur affiché sur le graphe est le module de ce critère. Ce critère rend compte de la qualité de l'ajustement du modèle, équation (14), sur les mesures. Un calcul intermédiaire est ensuite nécessaire pour obtenir R .

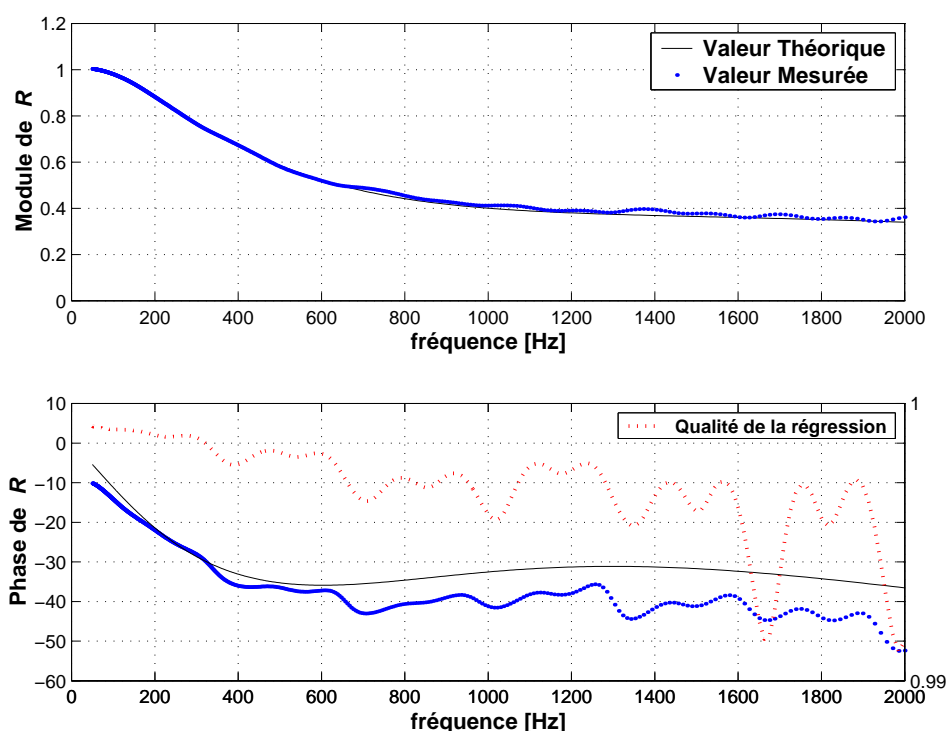


FIG. 10 – QUALITÉ DE LA REGRESSION

Références

- [1] [http ://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/reglin/reglin.htm](http://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/reglin/reglin.htm)
- [2] Probabilités et Statistiques , Jean-Louis POSS , Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Chapitre 8
- [3] Applied Regression Analysis ; Drapper, Smith ; John Wiley & Sons, Inc ; 1966
- [4] Méthodes statistiques ; Philippe Tassi ; Économica ; 1989 ; Chapitre 15 et 16.
- [5] Thèse de doctorat, Michel Henry, Mesures des paramètres caractérisant un milieu poreux. Étude expérimentale du comportement acoustique des mousses aux basses fréquences.